

Il Significato della Derivata “Incipiente”

Corrado Giannantoni

ENEA - “Ente per le Nuove Tecnologie, l’Energia e l’Ambiente”- Centro Ricerche Casaccia
Via Anguillarese Km 1,300, S. Maria di Galeria, 00060 Roma
Tel. 39-6-30483651, fax 39-6-30486484, e-mail: giannantoni@casaccia.enea.it

Sommario. In questo lavoro ci prefiggiamo di illustrare quali siano i presupposti fondamentali che sono alla “radice” di un nuovo concetto di derivata: la derivata “incipiente”. A tal fine però non potremo limitarci a richiamarne solo l’origine storico-cronologica, ma dovremo soffermarci anche, con particolare attenzione, sui i correlativi presupposti gnoseologici (soggiacenti al concetto stesso).

Per quanto riguarda l’origine storica, tale concetto trae origine dal tentativo di dare una appropriata formulazione matematica al Maximum Em-Power Principle (o Principio della Massima Potenza Emergetica), proposto da H. T. Odum come Quarto Principio della Termodinamica. Tale Principio, infatti, in conformità alla sua formulazione originaria, veniva sempre applicato in condizioni statiche. La sua caratteristica peculiare, infatti, era quella di esser fondato su una un’Algebra non-conservativa, appropriatamente concepita in modo da poter rappresentare (in condizioni statiche) una peculiare proprietà dei processi naturali: la loro intrinseca “irriducibilità” ad una descrizione in termini di sola quantità.

Il problema che si poneva, allora, era pertanto quello di generalizzare il Principio stesso in condizioni dinamiche, e perciò trasformare quella particolare Algebra non-conservativa (di tipo statico) in un corrispondente Calcolo Differenziale (dinamico), che fosse ad essa corrispondentemente fedele.

Il concetto di derivata “incipiente” così introdotto, dopo esser stato presentato in appositi consessi scientifici, nazionali ed internazionali, e dopo numerose applicazioni di particolare rilevanza, richiedeva anche che venissero evidenziati tutti quegli aspetti che, quasi sempre, in contesti strettamente specialistici vengono generalmente omissi, per sole ragioni di brevità. Perché si mira prevalentemente ai “risultati”.

E’ parso allora opportuno dedicare un po’ più attenzione, in modo particolare, ai suoi presupposti “fondativi” di carattere squisitamente gnoseologico. Ed è questo lo scopo principale del presente lavoro, finalizzato a Lettori comunque interessati al tema, ma non per questo necessariamente specialisti di Matematica o di calcolo differenziale.

1. Introduzione

Il concetto di derivata “incipiente” nasce (storicamente) dal tentativo di dare una formulazione matematica del tutto generale, in condizioni *dinamiche*, al Maximum Em-Power Principle, proposto da H. T. Odum come Quarto Principio della Termodinamica ([1],[2]). Nella sua versione originaria, infatti, tale Principio veniva generalmente applicato in condizioni *statiche* o, al più, *pseudo-dinamiche* (cioè transitori molto lenti, predefiniti dall’esterno). In tali condizioni poteva anche risultare sufficiente la sola adozione di un’Algebra non-conservativa (denominata Algebra Emergetica ([3],[4])). E questo perché il Maximum Em-Power Principle (o Principio della Massima Potenza Emergetica) considera i Sistemi termodinamici come sistemi *auto-organizzanti*, caratterizzati perciò da una essenziale peculiarità: la loro intrinseca “irriducibilità” ad una descrizione *meramente quantitativa*, e perciò *non descrivibili* (nemmeno in condizioni statiche) per mezzo dell’Algebra tradizionale, la quale, com’è ben noto, è tipicamente *conservativa*. Tali processi, infatti, mostrano una “eccedenza”, in *uscita*, di natura *non-quantitativa*, e pertanto “non-riducibile” alle specifiche caratteristiche dei rispettivi *ingressi*.

Il tentativo del tutto originale operato da Odum (limitatamente alle sole condizioni statiche) è stato quello di rappresentare tale *discontinuità* attraverso una *contabilità algebrica non-conservativa*. In sostanza, attraverso questo particolare espediente formale, Odum ha cercato di esprimere (e rappresentare) un fondamentale aspetto del mondo *fenomenologico* circostante, e precisamente quello per cui: “*vi sono processi, in Natura, che non sono riducibili a semplici meccanismi*” (come finora sempre supposto).

Tale “ir-riducibilità” si manifesta in modo particolarmente evidente in tre tipi di Processi (a cui fondamentalmente possono poi ricondursi tutti gli altri): la Co-produzione, l’Inter-azione, e la Retro-azione (o Feed-back), ciascuno dei quali caratterizzato da specifiche Regole di Algebra *non-conservativa*.

Pertanto, al fine di generalizzare la formulazione del Maximum Em-Power Principle anche a condizioni dinamiche comunque variabili ([5],[6]), si poneva il problema di *trasformare* queste Regole di Algebra non-conservativa (valida solo in condizioni statiche) in un corrispondente calcolo differenziale *dinamico*. Ed è proprio a questo stadio che si è mostrata più opportuna la definizione di un *nuovo* tipo di derivata.

Prima però di illustrare in dettaglio le specifiche ragioni di tale nuovo orientamento matematico, è opportuno richiamare il fatto che, cronologicamente: i) il nuovo concetto di derivata è stato inizialmente presentato in specifici convegni di Matematica [7],[8], perché fosse sottoposto ad un opportuno giudizio critico e potesse così ricevere un qualificato riconoscimento da parte della comunità scientifica internazionale; ii) immediatamente dopo è iniziata una intensa fase applicativa, in diversi ambiti scientifici ([9],[10],[11],[12],[13]), per poterne mostrare non solo la sua valenza del tutto generale, ma anche l’intrinseca capacità di affrontare e risolvere problemi da secoli ritenuti insolubili (come p. es. il famoso “Problema dei tre corpi” [14], inizialmente posto da Newton, e dimostrato poi *intrinsecamente insolubile* da Poincaré (nel 1889); oppure quello della *monochiralità* delle proteine [15], a tutt’oggi ancora insoluto, dopo oltre ottant’anni di ricerche); iii) solo occasionalmente sono stati pubblicati alcuni articoli meno specialistici ([16],[17],[18]), orientati cioè ad un pubblico più ampio, non necessariamente costituito da soli matematici; iv) tuttavia, il vasto ambito di applicabilità del nuovo concetto di derivata, l’associata rilevanza di alcuni risultati conseguiti ([14],[15]), nonché un più marcato interesse per tutte quelle problematiche che appaiono (con essa) più facilmente affrontabili, ha suscitato rinnovate richieste per la pubblicazione di un articolo che, più che addentrarsi nella specificità delle “applicazioni”, fosse orientato ad illustrarne il più profondo significato, quasi “alla radice”. In sostanza, un articolo più di natura “culturale” che squisitamente “tecnico”, in grado cioè di rispondere ad alcune domande fondamentali, come ad es. le seguenti: *perché dovrebbe risultare più opportuno ricorrere a questo tipo di derivata, rispetto all’altra, più nota ed affermata, che ha finora dato risultati più che soddisfacenti? E poi, per quali specifici problemi? E, soprattutto, dove risiedono le principale differenze fra i due tipi di derivata?* Questo articolo si propone allora di rispondere proprio a queste domande, che non sono affatto trascurabili. Come vedremo, infatti, il ricorso alla derivata “incipiente” introduce profonde novità, non solo sul piano operativo (come la risoluzione di problemi precedentemente giudicati “insolubili”), ma più propriamente a livello concettuale (si potrebbe anche dire, di tipo “culturale”). A questo punto possiamo passare all’esame della definizione formale della derivata “incipiente”. Prima però è opportuno premettere un brevissimo richiamo sull’Algebra *non-conservativa*.

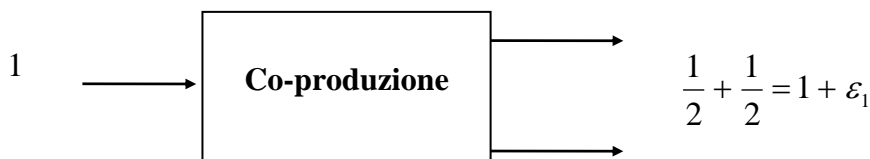
2. L’Algebra *non-conservativa* di Odum

Da un punto di vista puramente concettuale l’Algebra *non-conservativa* introdotta da Odum può essere schematicamente rappresentata, con riferimento ai tre processi fondamentali (Co-produzione, Inter-azione, Feed-back), come qui di seguito semplicemente illustrato:

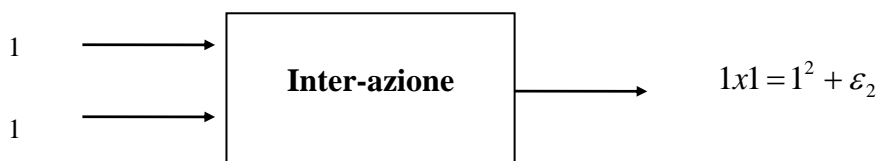
a) Il Processo di Co-produzione rappresenta un processo in cui, a partire da un unico ingresso, si hanno in uscita due (o più) *co-prodotti*. Questi ultimi sono così definiti perché caratterizzati dal fatto di non poter essere generati disgiuntamente. L’uno non può essere cioè generato senza che venga generato anche l’altro¹.

¹ Un semplice esempio può essere quello di una *mela*, costituita dalla *polpa* e dalla *buccia*. E’ allora evidente che nel processo di Co-produzione la maggior parte degli zuccheri, proteine, etc. si concentrerà nelle polpa, ed il resto andrà nella buccia. Ma non è possibile generare una mela “senza la buccia”, come pure non è possibile generarla “tutta buccia” e “senza polpa”. Oppure: una semplice *spiga di grano*, i cui *chicchi* non possono essere generati senza la contemporanea generazione dell’*involucro* che li protegge (e che diverrà poi *pula* nel corso della trebbiatura).

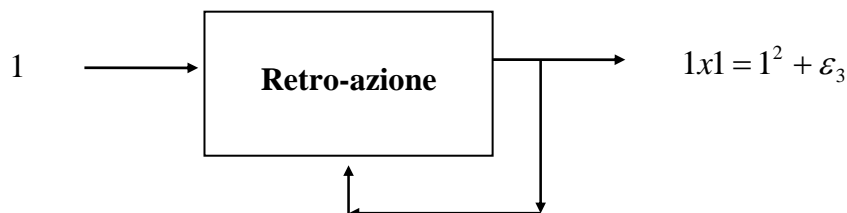
In tal caso, proprio per tener conto di tale “in-separabilità” genetica, si può convenire di rappresentare l’uscita complessiva del processo come la somma dei due output, con l’aggiunta però di un qualcosa che “eccede” la loro somma strettamente algebrica:



b) Il Processo di Inter-azione, invece, è quel processo in cui due grandezze interagiscono fra loro per dare origine ad una uscita complessiva che viene generalmente rappresentata come il prodotto dei due input. Anche in questo caso, però, proprio per l’ “eccedenza” che il processo presenta, tale uscita verrà ancora rappresentata con il prodotto dei due input, ma, anche qui, con l’aggiunta di un qualcosa (un di più) che “eccede” il loro stretto prodotto algebrico:



c) Il Processo di Retro-azione (o Feed-back), infine, può essere visto come una particolare “variante” del processo precedente, e cioè come l’interazione fra l’output (di un Processo) e l’ingresso stesso che ha concorso a generarlo:



In tal caso, ovviamente, l’ “eccedenza” in uscita dal processo (indicata ora con ε_3) sarà diversa da quella del processo precedente (indicata con ε_2).

Come si può allora facilmente riconoscere, per descrivere tutti questi processi, considerati (proprio per tali caratteristiche) come “processi generativi”, si fa ricorso ad una algebra *non-conservativa* affinché l’*eccedenza di quantità*, in uscita, possa (pur rimanendo sempre una quantità) essere intesa come “cifra” (in senso gnoseologico²) di una corrispondente *eccedenza di Qualità*.

Quest’Algebra non-conservativa, come già ricordato, è strettamente valida *solo* in condizioni statiche (o stazionarie). Appariva pertanto auspicabile una sua generalizzazione in un contesto propriamente “dinamico”. Si richiedeva, cioè, una sua opportuna trasformazione in un corrispondente calcolo differenziale.

² Il termine “cifra” (in gnoseologia) indica un qualsiasi simbolo che, pur caratterizzato da una sua *specifica natura*, viene adottato per rappresentare un’*altra entità*, di natura completamente *diversa*. Il concetto non è dissimile da quello che si adotta quando si assegnano dei voti alle interrogazioni o ai compiti in classe. Se p. es. un compito di matematica riceve un 7, mentre un altro riceve un 8, ciò non vuol dire che il secondo è il 16% migliore del primo. Con tale “eccedenza di quantità” (8 rispetto a 7) si suole generalmente indicare che quel compito è stato svolto non solo in modo corretto (come l’altro), ma anche in modo più *chiaro* ed *elegante*, perché anche *strettamente essenziale*, etc. Esprimiamo così, attraverso una quantità, delle proprietà (o delle qualità) di *tutt’altra natura*.

3. Dall'Algebra non-conservativa ad un nuovo concetto di derivata

A questo punto è facile comprendere il perché del ricorso ad un *nuovo concetto* di “derivata”.

E' sufficiente infatti tener conto delle proprietà appena ricordate per riconoscere subito l'*impossibilità* di “tradurre” tali proprietà negli stretti termini del calcolo differenziale tradizionale.

Questo aspetto verrà esaminato ora in maggior dettaglio, proprio perché costituisce un punto davvero centrale. Infatti, l'introduzione (e l'adozione) della ben nota derivata tradizionale (d/dt) non è altro che il riflesso, al livello linguistico-formale, della assunzione di tre *pre-supposti fondamentali* per la descrizione dei Sistemi fisici, biologici ed anche di tipo sociale (come, p. es. in Economia). Tali presupposti sono: i) la *causalità efficiente*; ii) la *logica necessaria*; iii) e una *relazionalità* (fra enti interagenti) di carattere strettamente *funzionale* (e perciò esprimibile attraverso il ben noto concetto di “funzione”).

Appare allora evidente che una tale prospettiva (tra l'altro assunta secondo modalità del tutto *aprioristiche*) esclude, sin dalle sue stesse fondamenta, la possibilità che l'*uscita* di un qualsiasi processo possa *mai* mostrare un alcunché di “*extra*”, rispetto al suo corrispondente ingresso, proprio in conseguenza del fatto che la dinamica stessa di qualsiasi processo analizzato è *già* stata supposta come intrinsecamente *necessaria, efficiente e funzionale*. Un tale approccio teorico, pertanto, non potrà *mai* “vedere” alcuna “eccedenza” in uscita da un processo, semplicemente perché, sin dall'inizio dell'indagine, ha già escluso che ve ne possa *mai* essere “alcuna”. In altre parole, sono gli stessi *presupposti* adottati che escludono, necessariamente, che vi possa essere una tale “eventualità”. Proprio per questa ragione si può affermare che un tale approccio descrive i fenomeni come se fossero dei puri “meccanismi” (v. anche par. 4). Quasi fossero tutti assimilabili a delle “locomotive”: un insieme di bielle, manovelle, pistoni, etc., con un comportamento necessariamente definito (a livello logico, causale, funzionale) dalle *sole* caratteristiche strutturali del processo e dalle specifiche grandezze “forzanti” in ingresso.

I Processi Generativi, invece, suggeriscono di adottare (quantomeno come “ipotesi di lavoro”) una differente forma di “causalità”, precisamente perché le grandezze in uscita (in tali Processi) mostrano una qualche “eccedenza” rispetto ai loro corrispondenti ingressi. Questa “causalità” può essere denominata “causalità generativa” o “causalità sorgiva” (ma si può anche ricorrere ad una qualsiasi altra espressione equivalente). In ogni caso il concetto che si intende esprimere è piuttosto chiaro. Infatti qualsiasi espressione adottata è semplicemente finalizzata ad indicare che è più opportuno ricorrere (almeno concettualmente) ad una forma di “causalità” in grado di dare origine ad un *alcunché* di “*extra*” rispetto a ciò che viene abitualmente previsto (ed atteso) sulla base dall'approccio “meccanicistico” di tipo tradizionale.

Lo stesso avviene per la Logica. Anche in questo caso, infatti, è opportuno far ricorso ad un differente tipo di Logica, in grado di contemplare cioè la possibilità che le conclusioni (di un ragionamento) possano risultare *anche più ricche* delle corrispondenti premesse. Altrimenti non si disporrebbe di una Logica in grado di interpretare la “causalità sorgiva”.

Questa nuova forma di Logica potrebbe, corrispondentemente, denominarsi Logica “aderente”. Perché le sue conclusioni sono sempre fedelmente conformi alle premesse. Anche se, nel contempo, queste potranno anche andare ben “al di là” di quanto è strettamente previsto dalle premesse stesse.

Come aderente conseguenza dei due concetti precedenti, le *relazioni* tra i fenomeni non potranno più essere ridotte a mere relazioni “funzionali” fra le corrispondenti quantità (cardinali). Tali quantità, infatti, “veicolano” sempre qualcos'altro. Ed è proprio questo aspetto che suggerisce di denominarle, perciò, *Relazioni “Ordinali”*. Questo termine, infatti, che a prima vista potrebbe sembrar rimarcare semplicemente una differenza con il corrispondente termine “cardinale”, ha in realtà un significato molto più profondo (come verrà più oltre illustrato).

Quanto appena esposto può essere allora sinteticamente riassunto come in Tabella 1:

Tab. 1 – Confronto sinottico fra i Presupposti Fondamentali dei due tipi di Calcolo Differenziale

<p>Calcolo Differenziale Tradizionale</p> <p>1) causalità efficiente</p> <p>2) logica necessaria</p> <p>3) relazioni funzionali</p>	<p>Calcolo Differenziale Incipiente</p> <p>1') Causalità Generativa</p> <p>2') Logica Aderente</p> <p>3') Relazioni Ordinali</p>
<p>La d/dt ne è la corrispondente traduzione formale</p> <p>Il simbolo $f(t)$ esprime un generico legame <i>funzionale</i></p>	<p>La $\tilde{d}/\tilde{d}t$ ne è la corrispondente traduzione formale</p> <p>Il simbolo $\tilde{f}(t)$ esprime una <i>Relazione Ordinale</i></p>

A questo stadio possiamo chiaramente affermare che il nuovo concetto di derivata “incipiente” non è altro che la aderente “traduzione”, in termini formali, dei tre nuovi concetti appena introdotti: la *Causalità Generativa*, la *Logica Aderente*, le *Relazioni Ordinali*.

4. La definizione formale di derivata “incipiente”

Tale derivata è stata denominata “incipiente” perché essa descrive i processi nella loro specifica *attività generativa*. In altri termini, focalizza l’attenzione sui vari output (del processo) nell’atto stesso in cui questi sono “generati”.

La sua definizione matematica è sostanzialmente basata sulla *priorità inversa* rispetto a quella secondo cui, abitualmente, si considerano i tre elementi fondamentali che costituiscono la definizione tradizionale

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta}{\Delta t} f(t) \tag{1},$$

e precisamente (da destra a sinistra): i) il concetto di *funzione* (che viene generalmente assunto come concetto primario); ii) il *rapporto incrementale* (della funzione supposta come nota); iii) l’operazione di *limite* (riferita al risultato dei due passi precedenti).

La derivata “incipiente” è pertanto definita come segue

$$\frac{\tilde{d}^q}{\tilde{d}t^q} \tilde{f}(t) = \underset{\tilde{\Delta}t:0 \rightarrow 0^+}{\tilde{Lim}} \circ \left(\frac{\tilde{\delta}-1}{\tilde{\Delta}t} \right)^q \circ \tilde{f}(t) \tag{2},$$

dove la sequenza dei simboli è interpretata secondo una *priorità diretta* (cioè da sinistra a destra):

i) il simbolo \tilde{Lim} rappresenta ora una sorta di “finestra” o di “soglia” (v. “*Limen*” in Latino), da cui

osserviamo e descriviamo il fenomeno considerato, mentre $\tilde{\Delta}t:0 \rightarrow 0^+$ indica non solo l’istante iniziale della nostra registrazione, ma anche, più propriamente, l’ “origine” (in senso etimologico)

di qualcosa di nuovo *che sta nascendo*; ii) l’ “operatore” $\tilde{\delta}$ registra la variazione della proprietà $\tilde{f}(t)$ (di volta in volta analizzata), non solo in termini di quantità, ma anche, ed in particolar modo, in termini di Qualità (e ciò è espressamente indicato dal simbolo “tilde”, specificamente adottato

allo scopo); iii) di conseguenza, il rapporto $(\frac{\tilde{\delta}-1}{\tilde{\Delta}t})$ non indica solo una variazione quantitativa nel

tempo, ma una di variazione sia di *quantità* che di *Qualità*; iv) in tal modo essa viene ad esprimere la *Generatività* del processo considerato o, in altri termini, quell' "eccedenza" che si manifesta in uscita (per unità di tempo), la quale sarà sicuramente caratterizzata da una sua *cardinalità*, ma anche da una specifica *Qualità*, gerarchicamente ordinata secondo l'*Ordinalità* q ; v) la sequenza dei simboli viene interpretata inoltre come una *inter-azione generativa* (rappresentata dal simbolo "o") fra i tre concetti considerati; vi) e la definizione è valida per *qualunque numero razionale* q .

Al fine di illustrare meglio i recedenti concetti possiamo riferirci alla Relazione esponenziale $e^{\tilde{\alpha}(t)}$.

E questo perché una qualsiasi Relazione $\tilde{f}(t)$ può sempre trascriversi nella forma

$$\tilde{f}(t) = e^{\ln \tilde{f}(t)} = e^{\tilde{\alpha}(t)} \quad (3) \quad \text{con} \quad \tilde{\alpha}(t) = \ln \tilde{f}(t) \quad (4).$$

In tal caso la definizione (2), considerata per $q = 1$, fornisce

$$\frac{\tilde{d}}{\tilde{d}t} e^{\tilde{\alpha}(t)} = \overset{\circ}{\alpha}(t) \circ e^{\tilde{\alpha}(t)} \quad (5),$$

dove $\overset{\circ}{\alpha}(t)$ rappresenta la derivata *incipiente*, del primo ordine, della $\tilde{\alpha}(t)$.

A tal riguardo è importante sottolineare che il *cerchietto* che caratterizza la derivata incipiente $\overset{\circ}{\alpha}(t)$ è stato scelto in analogia con la classica notazione "punto" di Newton, abitualmente adottata per indicare la (tradizionale) derivata del primo ordine. La differente simbologia è ora giustificata dalla *differenza concettuale* che sussiste fra la derivata incipiente e la derivata tradizionale. Infatti, anche

se $\overset{\circ}{\alpha}(t)$ e $\dot{\alpha}(t)$ possono coincidere da un punto di vista strettamente cardinale, le due derivate sono,

per contro, radicalmente diverse da un punto di vista *concettuale*. La $\overset{\circ}{\alpha}(t)$, infatti, rappresenta l'*esito* di un *Processo Generativo*, mentre $\dot{\alpha}(t)$ è sempre intesa come il *risultato* di un processo governato da leggi *necessarie* (pensato cioè come una sorta "meccanismo" o un insieme di "meccanismi" concatenati).

Per illustrare più chiaramente questo concetto possiamo pensare alla rappresentazione grafica della $f(t)$. In tal caso ogni punto (del grafico) rappresenta il particolare valore della funzione registrato in corrispondenza del generico istante t considerato. Si ritiene allora che tali "punti" siano *direttamente* fra loro collegati, in quanto si assume, come presupposto fondamentale, che vi sia una *causa efficiente* all'origine di tale andamento. Di conseguenza, nel ricercare le proprietà *geometriche* dell'andamento stesso (come p. es. la pendenza locale) si ritiene di poter risalire ad una *legge fisica*, di natura *necessaria*, secondo cui la (supposta) causa soggiacente si manifesterebbe. In tale prospettiva, la derivata $\dot{\alpha}(t)$ viene intesa proprio come una espressione (necessaria) di tale *relazione diretta*, di natura *causale efficiente*, fra i valori assunti ad ogni istante dalla funzione $f(t)$.

Nel caso invece della $\overset{\circ}{\alpha}(t)$, si parte da presupposti totalmente diversi. Anche se (preliminarmente) si può ancora assumere che il diagramma precedente sia espressione dei valori *cardinali* della

Relazione $\tilde{f}(t)$, questi valori non vengono più pensati come "direttamente" correlati fra loro, ma correlati (fra loro) *solo del tutto indirettamente*. Perché non sono più intesi come *risultato* di un processo "causale-efficiente", ma come *esito* (*ciascuno di per sé*) di un medesimo *Processo Generativo*. Loro "registrazione", pertanto, non è più intesa come un "dato", semplicemente acquisito attraverso operazioni di misura, ma (per introdurre una differenza terminologica) come un "datum", cioè qualcosa che, nel suo insieme, rappresenta un unico *Processo Generativo*, in cui (perciò) ogni "punto" è *esito* di una generazione sorgiva *completamente autonoma ed indipendente* dagli altri.

Il valore cardinale di $\overset{\circ}{\alpha}(t)$ può allora anche coincidere con quello di $\dot{\alpha}(t)$, ma viene ora ad esprimere un concetto completamente diverso: rappresenta cioè il tasso di Generatività cardinale, come *manifestazione fenomenologica* di un Processo Ordinale.

Il discorso è ovviamente valido (e a maggior ragione) anche nel caso di una derivata di ordine n . In tal caso la definizione (2) fornisce

$$\left(\frac{\tilde{d}}{\tilde{d}t}\right)^n e^{\tilde{\alpha}(t)} = [\overset{\circ}{\alpha}(t)]^n \circ e^{\tilde{\alpha}(t)} \quad (7).$$

E ancor più, come vedremo, nel caso di un ordine di derivazione frazionario, in cui, posto $q = m/n$, si ha

$$\left(\frac{\tilde{d}}{\tilde{d}t}\right)^{m/n} e^{\tilde{\alpha}(t)} = [\overset{\circ}{\alpha}(t)]^{(m/n)} \circ e^{\tilde{\alpha}(t)} \quad (8).$$

Come si può facilmente riconoscere, è come se la derivata incipiente “estraesse” le *caratteristiche genetiche* fondamentali delle Relazione $e^{\tilde{\alpha}(t)}$, per potenziare poi tale specifico carattere secondo l’ordine di *generazione* considerato.

Per illustrare ancor più chiaramente questi ultimi concetti, possiamo allora riprendere i tre Processi Generativi fondamentali, e mostrare contemporaneamente come questi possano essere facilmente generalizzati, in condizioni dinamiche, per mezzo della derivata incipiente.

A) Il Processo di Co-produzione

Questo Processo, infatti, può essere facilmente rappresentato in termini formali attraverso la derivata incipiente di ordine 1/2. Questa derivata, infatti, dà origine ad una Relazione “binaria” (v. Fig. 1), cioè ad un’ “uscita” composta da due elementi distinti, che formano però una *sola ed unica entità*. Ciò è equivalente ad affermare che i due “co-prodotti”, proprio perché generati dallo *stesso ed unico* Processo (Generativo), conservano “memoria” della loro *indivisibile origine* comune, anche se, in seguito, con il trascorre del tempo, potranno assumere ubicazioni topologiche completamente diverse fra loro:

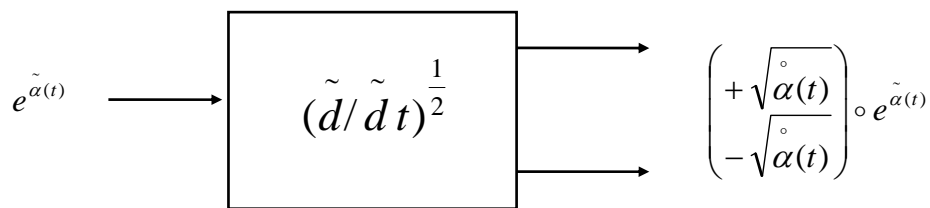


Fig. 1 - Rappresentazione di un Processo di Co-produzione

La genesi di una funzione “binaria” (come esito di un processo di Co-produzione) può essere allora formalmente rappresentata come segue:

$$\left(\frac{\tilde{d}}{\tilde{d}t}\right)^{\frac{1}{2}} e^{\tilde{\alpha}(t)} = \begin{pmatrix} +\sqrt{\overset{\circ}{\alpha}(t)} \\ -\sqrt{\overset{\circ}{\alpha}(t)} \end{pmatrix} \circ e^{\tilde{\alpha}(t)} \quad (9),$$

dove l’ordine della derivazione (pari 1/2) indica esplicitamente che l’output generato è costituito da “1” *sola* entità, benché composto da “2” elementi distinti. In altri termini l’ “uscita”, intesa come un “tutto”, è ben *più* che la semplice somma delle parti. Detto in altri termini, l’*unicità* del Processo Generativo, riconosciuta come una *proprietà specifica* del Processo di Co-produzione, rimane una proprietà *in-divisibile*, e pertanto anche *ir-riducibile* alle sue parti componenti. Ogni co-prodotto,

infatti, conserva *sempre* “memoria” del comune processo generativo.

Un semplice esempio di tale Processo può essere fornito dalla Generazione di due “gemelli”, i quali conservano sempre “traccia” della loro Generazione comune, e che si manifesta non solo a livello genetico, ma anche attraverso molte altre caratteristiche psico-fisiche.

Questo esempio è anche particolarmente utile per illustrare che, al livello formale, il corrispondente

“equivalente” delle *proprietà genetiche* (appena ricordate) è costituito dalla radice quadrata $\sqrt{\overset{\circ}{\alpha}(t)}$. Questa, infatti, rappresenta una sorta di “estrazione” (da parte della derivata di ordine 1/2) delle “proprietà genetiche” della Relazione Ordinale $e^{\tilde{\alpha}(t)}$, mentre i simboli “+/-” caratterizzano le due corrispondenti distinte cardinalità *com-presenti* nella Relazione “binaria” (v. (9)).

Il concetto di Processo di Co-produzione, tuttavia, non è ristretto ai soli esseri viventi. Tale Processo Generativo, infatti, è presente anche in Meccanica Classica. Un tale modello, infatti, se adottato per descrivere la relazione fra il Sole e Mercurio, intesi come corpi generati dalla originaria “Nebulosa di Laplace”, è in grado di spiegare le famose “Precessioni di Mercurio” senza alcuna necessità di ricorrere alla Relatività Generale [14]. Lo stesso avviene nell’ambito della Meccanica Quantistica, dove lo stesso modello Co-generativo è in grado di interpretare il famoso (ed ancora inspiegato) “Entanglement” fra due distinti fotoni *co-generati* da uno stesso processo [14]. Ma è presente anche nelle attività umane, come p. es. in Economia. In particolare quando si considera la *genesì delle esternalità* nelle transazioni economiche [12]).

B) Il Processo di Inter-azione

Questo Processo Generativo può essere facilmente illustrato considerando, in un primo momento, un processo caratterizzato da un singolo “ingresso” (v. Fig. 2). In tal caso il Processo può essere modellizzato per mezzo della derivata incipiente di Ordine 2. Il Processo rappresenta allora una sorta di *rinforzo co-operativo* dell’ingresso originario, e perciò dà origine (così) ad una nuova entità, la quale, proprio per questa ragione, costituisce qualcosa di *ben più* che il semplice prodotto cardinale dell’input iniziale per se stesso, come indica la seguente rappresentazione

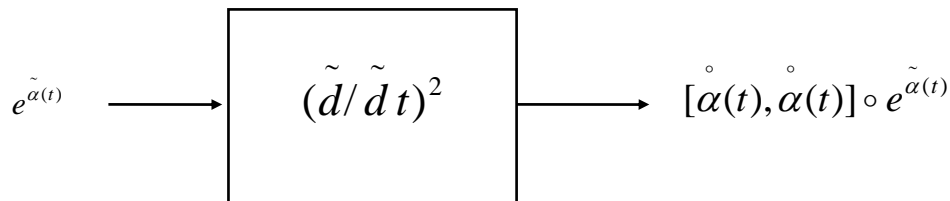


Fig. 2 - Rappresentazione Formale della amplificazione Ordinale in un Processo a “duetto”

dove la notazione $[\overset{\circ}{\alpha}(t), \overset{\circ}{\alpha}(t)]$ sta ad indicare proprio questa *nuova entità* che, come espressione di tale forma di “eccedenza”, può definirsi un “duetto”,

Anche questo Processo può dirsi “Generativo” proprio perché i due contributi (precedentemente ricordati) non solo si rinforzano vicendevolmente, ma vengono anche *uni-ficati* (dal Processo stesso) in una *nuova e unica* entità, che è qualcosa di più del loro semplice prodotto scalare. In altri termini, essi non solo accrescono la cardinalità specifica della loro comune azione, ma generano anche una “eccedenza” di Qualità, rappresentata dalla *unicità* ed *irriducibilità* della loro attività di *co-operazione*, perché *solidalmente ed indissolubilmente* orientati nella stessa “direzione”. Per questo la corrispondente “uscita” può essere denominata una *Relazione “a duetto”*, ed esser rappresentata, in termini formali, come

$$\left(\frac{\tilde{d}}{\tilde{d}t}\right)^2 e^{\tilde{\alpha}(t)} = [\overset{\circ}{\alpha}(t), \overset{\circ}{\alpha}(t)] \circ e^{\tilde{\alpha}(t)} \quad (10).$$

E' allora facile riconoscere che, qualora tale Processo Generativo venisse “visto” (invece) in una prospettiva meramente *cardinale* (come peraltro di solito avviene), l'output si ridurrebbe al ben noto risultato scalare, costituito dal prodotto fra le due quantità $\dot{\alpha}$, fornendo così (nell'ipotesi di $\ddot{\alpha}(t) = 0$) l'espressione

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^2 e^{\tilde{\alpha}(t)} = [\dot{\alpha}(t) \cdot \dot{\alpha}(t)] \cdot e^{\alpha(t)} = [\dot{\alpha}(t)]^2 \cdot e^{\alpha(t)} \quad (11).$$

In tal caso, infatti, il processo viene descritto per mezzo della derivata tradizionale (v. Eq. (11)), la quale, come ripetutamente affermato, “*filtra*” ogni forma di Ordinalità della $e^{\tilde{\alpha}(t)}$, e porta ad esprimere il risultato finale attraverso il *prodotto “punto”* (o prodotto “scalare”), che “riduce” il “duetto” $[\dot{\alpha}(t), \dot{\alpha}(t)]$ al semplice quadrato $[\dot{\alpha}(t)]^2$ e, nel contempo, la Relazione Ordinale $e^{\tilde{\alpha}(t)}$ ad una semplice “funzione” scalare.

B1) Il Processo di Inter-azione in senso proprio

Il Processo di Inter-azione manifesta però la sua vera essenza quando è caratterizzato da (almeno) due input distinti, come in Fig. 3

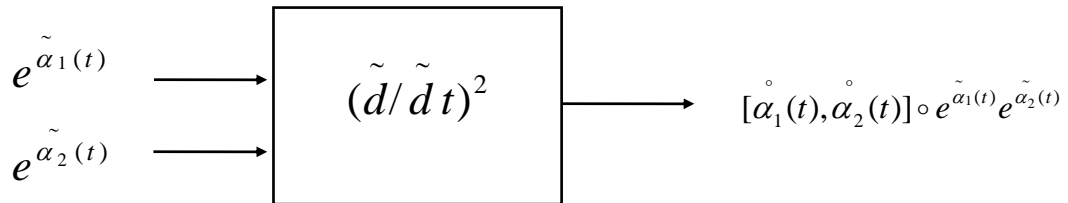


Fig. 3 - Rappresentazione di un Processo di Inter-azione

dove il “duetto” $[\dot{\alpha}_1(t), \dot{\alpha}_2(t)]$ rappresenta ora un “AND” logico $[\dot{\alpha}_1(t), \dot{\alpha}_2(t)] \wedge [\dot{\alpha}_2(t), \dot{\alpha}_1(t)]$, ed è pertanto caratterizzato dalla *totale assenza* di ogni forma di reciproca *priorità interna*.

E' opportuno però ricordare che il Processo di Inter-azione è molto spesso associato ad un Processo di Co-produzione. In tal caso si può parlare di un Processo di Inter-azione caratterizzato da un “soggiacente” Processo Cogenerativo (con le sue associate funzioni “binarie”).

Il Processo può allora essere descritto per mezzo di una derivata incipiente di Ordine 2/2, ed esser perciò rappresentato come in Fig. 4

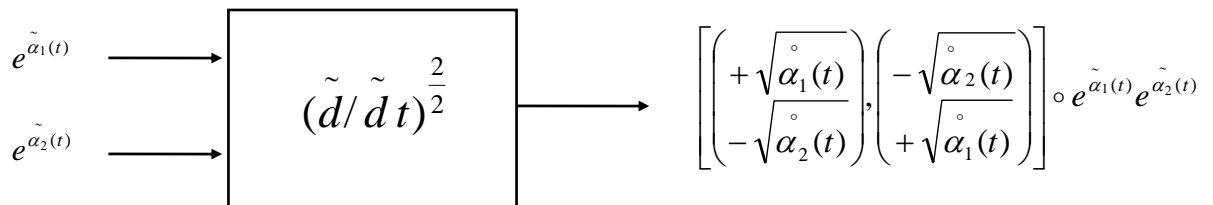


Fig. 4 - Rappresentazione di un Processo di Inter-azione (con Co-produzione “soggiacente”)

In tal caso i due input non solo contribuiscono ad un reciproco “rinforzo”, ma sono anche reciprocamente “accoppiati” in forma di funzione “binaria”. Tale accoppiamento è, per giunta, ulteriormente intensificato dall'inter-scambio (e successivo accoppiamento) delle rispettive e specifiche proprietà “*genetiche*” delle funzioni Ordinali in ingresso (e cioè, rispettivamente, $\sqrt{\dot{\alpha}_1(t)}$

e $\sqrt{\alpha_1(t)}$). Il Processo darà perciò origine ad una funzione “binaria-duetto” (v. secondo membro della (12)):

$$\left(\frac{\tilde{d}}{\tilde{d}t}\right)^{\frac{2}{2}} [e^{\tilde{\alpha}_1(t)} e^{\tilde{\alpha}_2(t)}] = \left[\begin{pmatrix} +\sqrt{\alpha_1(t)} \\ -\sqrt{\alpha_2(t)} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sqrt{\alpha_2(t)} \\ +\sqrt{\alpha_1(t)} \end{pmatrix} \right] \circ e^{\tilde{\alpha}_1(t)} e^{\tilde{\alpha}_2(t)} \quad (12).$$

Un esempio particolarmente significativo di un tale Processo Generativo può essere rappresentato dalla *generazione di un essere vivente*. L’espressione (12), infatti, potrebbe costituire una preliminare rappresentazione (formale) della ri-composizione di una coppia di cromosomi *totalmente nuova*, a partire rispettivamente da un cromosoma paterno ed uno materno. Evidentemente il Processo è qui rappresentato in forma estremamente semplificata. Esso infatti, nel caso di un essere umano (p. es.), richiederebbe la considerazione di 23 coppie di cromosomi provenienti dal padre ed altrettante coppie derivanti dalla madre, che darebbero così origine ad un essere umano *completamente nuovo*, caratterizzato anch’esso da 46 *nuove coppie* di cromosomi.

C) Il Processo di Feed-back (o Retro-azione) Ordinale

Questo Processo può essere facilmente illustrato sulla base del Processo di Inter-azione, assumendo che l’output Ordinale del Processo contribuisca, insieme con l’ “ingresso”, alla *sua stessa* genesi (v. Fig. 5):

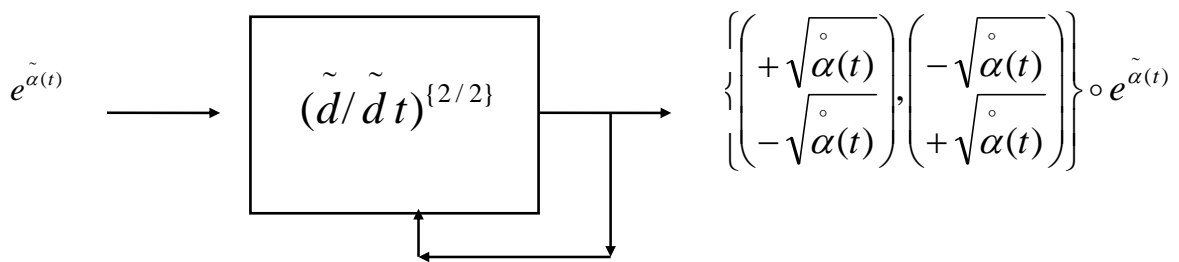


Fig. 5 - Rappresentazione di un Processo di Feed-back Ordinale

In tal caso l’output rappresenta una perfetta riproduzione *speculare* dell’input, benché ad *un più elevato livello di Ordinalità*. Questo è il motivo per cui la derivate di Ordine $\{2/2\}$ (come pure l’uscita del Processo) è generalmente rappresentata in parentesi graffe. Per rimarcare, così, la caratteristica e specifica *consonanza armonica* tra l’ingresso e l’uscita del Processo a Feed-back Ordinale che, in termini formali, può essere così espresso

$$\left(\frac{\tilde{d}}{\tilde{d}t}\right)^{\{2/2\}} e^{\tilde{\alpha}(t)} = \left\{ \begin{pmatrix} +\sqrt{\alpha(t)} \\ -\sqrt{\alpha(t)} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sqrt{\alpha(t)} \\ +\sqrt{\alpha(t)} \end{pmatrix} \right\} \circ e^{\tilde{\alpha}(t)} \quad (13).$$

A questo stadio, le Equazioni (9), (10) e (13) rappresentano esattamente la generalizzazione formale delle Regole di Algebra Emergetica schematicamente illustrate nel precedente par. 2. Le Equazioni (9), (10) e (13) mostrano infatti come rappresentare in termini *Ordinali*, e in relazione alla specifica tipologica di Processo considerato, la corrispondente genesi di una “*eccedenza*” di *Qualità*, inizialmente rappresentata per mezzo di un Algebra non-conservativa, facendo (in tal caso) ricorso ad una semplice *eccedenza di quantità* (v. le grandezze $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$, del par. 2).

La Co-produzione, infatti, viene ora caratterizzata da una *Ordinalità* pari a $1/2$ (cioè pari alla potenza della derivata incipiente $\tilde{d}/\tilde{d}t$, intesa in senso Ordinale). Il Processo di Inter-azione è caratterizzato da una Ordinalità 2. Infine, il più elementare Processo di Feed-back (Ordinale) è caratterizzato da una Ordinalità $\{2/2\}$, intesa questa come un'*unica* entità formale.

A tal riguardo è opportuno sottolineare che l'Ordinalità $\{2/2\}$ non corrisponde al valore cardinale "1", e nemmeno alla frazione $2/2$, perché il Feed-back Ordinale non è riducibile alla semplice "combinazione" dei due Processi Generativi precedenti. La stessa Eq. (13) mostra chiaramente, già di per sé, un tale "eccedenza" di Ordinalità rispetto alla Eq. (12). L'Eq. (13), infatti, rappresenta una "eccedenza" nelle *relazioni di armonia interne* dovute alla *persistenza di forma* che correlano intimamente fra loro le *quattro* funzioni elementari che appaiono sul lato destro della Relazione, organizzate ora in un'*unica irriducibile struttura*. Ma non entreremo qui in ulteriori dettagli. Quel che è opportuno invece sottolineare è che queste Relazioni consentono di mostrare come la

coincidenza puramente quantitativa fra $\overset{\circ}{\alpha}(t)$ e $\dot{\alpha}(t)$ è strettamente valida solo per l'ordine $n=1$. Infatti, nel caso generale di un esponente Ordinale (m/n) , l'Eq. (8) mostra il più profondo significato di una "uscita" Ordinale (strutturata in termini di funzioni binarie-duetto di tipo *multiplo*) e, nel contempo, la profonda differenza rispetto alle corrispondenti derivate *cardinali* di ordine frazionario m/n generalmente considerate in Letteratura [19].

Il secondo membro della (8), infatti, rivela (come già anticipato) una proprietà estremamente importante: una sorta di "persistenza di forma", che non è altro che una "aderente" conseguenza del fatto che ogni Processo, proprio perché è *generativo*, è caratterizzato anche da sue proprie (e specifiche) modalità di generazione. In altri termini, qualsiasi Processo "generativo" (così come modellizzato dal primo membro della (8)) dà origine ad un output Ordinale (caratterizzato da una Ordinalità (m/n)) che corrisponde ad una Relazione a *struttura multipla* (v. secondo membro della (8)), in cui le funzioni componenti sono simili ad evoluzioni *armoniche*. E queste risultano in "risonanza" (come in un "accordo musicale") non solo fra loro, ma anche (e allo stesso tempo) con la Relazione originaria, giungendo poi ad esprimere il *massimo livello di armonia* nel caso di un Feed-back Ordinale perfetto $\{n/n\}$.

Ciò vuol dire anche che i concetti di Co-produzione, Inter-azione e Feed-back (Ordinali), rappresentati attraverso le Equazioni (9), (10) e (13), possono essere *sempre* adottati per descrivere un *qualsiasi* Processo Generativo in condizioni dinamiche, *comunque complesso* esso sia. Ciò è dovuto al fatto che, mentre il secondo membro delle (9), (10) e (13) fornisce la struttura Ordinale, rispettivamente, della Co-produzione, Inter-azione e del Processo di Feed-back, i corrispondenti primi membri sono tutti caratterizzati da una *medesima struttura*, sempre della forma $(\tilde{d}/\tilde{d}t)^q$, dove q è un numero razionale (inteso in senso Ordinale) che assume rispettivamente i valori $1/2$, 2, $\{2/2\}$. Ciò significa che tutti i Processi Generativi sono di fatto caratterizzati da una *stessa Generatività* "soggiacente", la quale può assumere, tuttavia, *forme* diverse a seconda della specifica Ordinalità q considerata.

In tal senso si può allora affermare che la $(\tilde{d}/\tilde{d}t)^q$ è un fedele riflesso di un'*unica* Generatività soggiacente (rappresentata da $\tilde{d}/\tilde{d}t$), di natura Ordinale (e di Ordine q), che si manifesta in tutti i Processi del mondo circostante. Cioè un'*unica* Generatività che, ogni volta, attraverso una specifica Ordinalità, caratterizza ciascun Processo sin dalla sua primissima fase generativa.

Conclusioni

Come abbiamo cercato di mostrare, è stato proprio la considerazione (e lo studio) dei Processi Generativi (Co-produzione, Inter-azione, Feed-back) che ha suggerito l'introduzione di un *linguaggio differenziale* in grado di "cogliere" (e registrare) quella "eccedenza" che tali processi mostrano, e che risulta *totalmente irriducibile* ad un approccio meramente cardinale.

Nonostante le profonde differenze precedentemente illustrate, i due distinti approcci, quello *cardinale* (in d/dt) e quello *Ordinale* (in $\tilde{d}/\tilde{d}t$), rimangono sempre “com-possibili”. Cioè, *non si escludono* l’un l’altro. E questo perché: ciò che può effettivamente “giudicare” della rispettiva validità è solo il *riscontro* sperimentale.

Tuttavia, se accade (come di fatto accade) che in molteplici casi il primo tipo di approccio non ottiene i riscontri desiderati, la causa non può essere attribuita (come spesso si fa) alla “complessità” della Natura. Bisogna infatti risalire ai *pre-supposti*, ed essere ben consapevoli che, non appena si adotta un predefinito linguaggio formale, tale adozione corrisponde già all’implicita assunzione dei correlativi presupposti soggiacenti. E questi potrebbero anche rilevarsi *non adeguati* alla descrizione (e alla soluzione) del problema oggetto di indagine.

Più in generale, i due approcci risulteranno *sempre* fra loro “com-possibili” perché: i) il primo non è in grado, per la natura stessa della logica adottata, di potersi definire *auto-fondato*, in termini “assoluti” (proprio per l’assenza di *induzione perfetta* nella logica necessaria); ii) il secondo, invece, non è affatto orientato a “falsificare” (in senso Popperiano) le conclusioni dell’altro. Perché si muove a tutt’altro livello, che è di natura *Ordinale*, e da tale prospettiva tende solo a mostrare che: “*si può far meglio*”. Ovviamente, sostenendo sempre tale affermazione sulla base di riscontri sperimentali.

Per essere ancora più espliciti, possiamo qui richiamare due semplici esempi:

i) il primo approccio (come è ben noto) non è in grado di fornire una soluzione esplicita (o anche soltanto in forma chiusa) a problemi differenziali (a coefficienti variabili) di ordine superiore a 1. Il secondo, invece, è in grado di fornire una soluzione *esplicita* per qualsiasi problema differenziale, comunque complesso;

ii) il primo approccio non è stato in grado (nonostante numerosissimi tentativi, protrattisi per oltre tre secoli) di dare una soluzione al famoso “Problema dei tre corpi” (nella Meccanica Celeste). Il secondo invece è in grado di farlo, non solo in forma chiusa [14], ma anche in forma esplicita. E si potrebbe procedere ancora, con altri esempi.

Quanto appena ricordato dovrebbe allora essere in grado di illustrare chiaramente che: le “difficoltà” incontrate, in questi casi, non sono tanto insite nei problemi di volta in volta considerati, quanto piuttosto nei metodi (e nei corrispondenti *presupposti*) adottati per risolverli.

Ciò vuol dire anche che, pur nella riconosciuta “com-possibilità” degli approcci, ogni Studioso, sin dall’origine dell’indagine che si appresta ad operare, è direttamente coinvolto in una sorta di *opzione di carattere fondamentale*, chiaramente illustrata dalla Tabella 1. Lo Studioso deve cioè esser cosciente del fatto che, sin dall’inizio, per la sola scelta del *linguaggio formale* che adotterà, potrebbe (a ragione dei corrispondenti *presupposti soggiacenti*) essersi già *auto-pre-cluso* (per quella sola scelta) la soluzione stessa del problema che vorrebbe risolvere.

Bibliografia

- [1] Odum H. T., *Environmental Accounting*. Environ. Engineering Sciences. Univ. of Florida, 1994.
- [2] Odum H. T., *Self Organization and Maximum Power*. Environ. Engineering Sciences. University of Florida, 1994.
- [3] Brown M. T., *Workshop on Emergy Analysis*. Siena, Settembre 20-25, 1993.
- [4] Brown M.T. & Herendeen R. A., *Embodied Energy Analysis and EMERGY analysis: a comparative view*. Ecological Economics 19 (1996), 219-235.
- [5] Giannantoni C., *The Maximum Em-Power Principle as the basis for Thermodynamics of Quality*. Ed. SGE, Padova, 2002, p. 187. ISBN 88-86281-76-5.
- [6] Giannantoni C., *Il Principio della Massima Potenza Emergetica come base per una Termodinamica della Qualità*. Edizioni Sigraf, Pescara, 2006. ISBN 88-901622-1-X.
- [7] Giannantoni C., *The Problem of the Initial Conditions and Their Physical Meaning in Linear Differential Equations of Fractional Order*. Third Workshop on “Advanced Special Functions and Related Topics in Differential Equations”- June 24-29, 2001- Melfi (Italy). Applied Mathematics and Computation 2003;(141): 87-102.

- [8] Giannantoni C., *Mathematics for Generative Processes: Living and Non-Living Systems*. Applied Mathematics and Computation 2006;(189): 324-340.
- [9] Giannantoni C., *Advanced Mathematical Tools for Energy Analysis of Complex Systems*. Proceedings of the International Workshop on "Advances in Energy Studies". Porto Venere, May 23-27, 2000. Ed. SGE, Padova, 2001, pp. 563-572.
- [10] Giannantoni C., *Mathematics for Quality: in Living and Non-Living Systems*. Second Emergy Evaluation and Research Conference. Gainesville (Florida, USA), September 20-22, 2001.
- [11] Giannantoni C., *Differential Bases of Emergy Algebra*. Proceedings of Third Emergy Conference. Gainesville, Florida, USA, January 29-31, 2004.
- [12] Giannantoni C., *Thermodynamics of Quality and Society*. Proceeding of International Workshop on "Advances in Energy Studies", Campinas, Brazil, June 16-19, 2004, pp. 139-157.
- [13] Giannantoni C., *Emergy Analysis as the First Ordinal Theory of Complex Systems*. Proceedings of Fourth Emergy Conference 2006. Gainesville, Florida, USA, January 17-22, 2006.
- [14] Giannantoni C., *Armonia delle Scienze (volume primo). La Leggerezza della Qualità*. Edizioni Sigraf, Pescara, Giugno 2007. ISBN 978-88-95566-00-9.
- [15] Giannantoni C., *Armonia delle Scienze (volume secondo). L'Ascendenza della Qualità*. Edizioni Sigraf, Pescara, Luglio 2008. ISBN 978-88-95566-18-4.
- [16] Giannantoni C., *Il Quarto Principio della Termodinamica e il concetto di Qualità nelle Discipline Scientifiche e Umanistiche*. Incontro-Dibattito - Università "Gabriele D'Annunzio" - Pescara. Edizione a cura dell'Ordine degli Ingegneri e dell'Amministrazione Provinciale di Pescara, 4 Aprile 2003.
- [17] Giannantoni C., *La matematica dei Processi Generativi*. Atti del Convegno sul "Calcolo matematico precolombiano". Istituto Italo-Latino Americano, Roma, 21 Ottobre 2003.
- [18] Giannantoni C., *Introduzione alla Matematica dei Processi Generativi*. "Biologi Italiani". Rivista Ufficiale dell'Ordine di Biologi Italiani, n. 6, Giugno 2007.
- [19] Oldham K. B. e Spanier J., *The Fractional Calculus. Theory and Applications of Differentiation and Integration to Arbitrary Order*. Academic Press, Inc., London, 1974.